

Introduction au calcul d'erreur

N. Bouleau

On appelle calcul d'erreur une méthode pour trouver l'erreur sur une fonction de ce qui est mesuré. Nous étudions dans cette partie le calcul d'erreur d'un point de vue mathématique et du point de vue du lien avec l'expérimentation. Gauss fut le premier à proposer un calcul d'erreur au début du 19^{ème} siècle. Ce calcul possède une propriété de cohérence qui le rend supérieur dans bien des questions à d'autres formulations qui furent tentées par la suite.

Examinons le problème plus au détail. Les objectifs de l'estimation de l'erreur peuvent être de diverses natures : a) Soit on s'intéresse à une situation spécifiée et on cherche un moyen pour avoir *une estimation pessimiste de l'erreur* qui permet de s'exprimer en sécurité. On est amené alors à travailler avec des bornes, intervalles ou domaines, et de voir comment ils se transforment au cours des calculs. Cette manière de procéder, idéale théoriquement, est cependant redoutablement compliquée voire impraticable dans beaucoup de cas. Même pour ce qui est des erreurs dues aux représentations des nombres réels en informatique cette approche ne peut être menée que dans des cas très simples. b) Soit on ne désire qu'un ordre de grandeur de l'erreur et on souhaite l'obtenir facilement. C'est souvent le cas pour l'ingénieur. Dans ce contexte un très grand nombre de pratiques existent. Comme elles doivent être simples et rapides, elles ne peuvent pas procéder à un véritable calcul des probabilités qui expliciterait comment la loi de probabilité issue de la mesure se transmet à travers les fonctions du modèle. Ces calculs de "lois images" sont d'ailleurs vite inextricables. Donc elles se contentent d'estimations souvent hybrides, faisant par exemple l'hypothèse que les erreurs de mesure sont gaussiennes et calculant les transmissions d'erreur en linéarisant les fonctions au voisinage de la valeur moyenne. Ceci rend des services mais on ressent un certain malaise finalement car à l'issue du calcul on ne sait plus très bien ce que l'erreur obtenue représente vraiment. c) Enfin on peut chercher le bon langage mathématique pour faire un vrai "développement limité" de l'erreur qui sera asymptotiquement exact si l'erreur est petite. On est alors très proche d'un *calcul de sensibilité*. Mais il s'agit plus précisément d'un calcul de sensibilité *probabiliste*, ce point est important dans le cas de modèles non-linéaires.

Le calcul proposé par Gauss relève de l'approche c) mais n'en constitue qu'un aspect, le plus simple, celui relatif aux "variances infinitésimales" dans le cas fini-dimensionnel. Avec ce formalisme élémentaire on ne peut pas considérer des erreurs sur des fonctions ou des objets géométriques tels que des surfaces, ou encore sur des processus aléatoires. Mais les idées de Gauss peuvent être poussées plus loin par un principe d'extension fondé sur la théorie des formes de Dirichlet. On obtient un calcul complet lipschitzien qui se comporte parfaitement par image et par produit et permet une construction facile des notions de base de ce qu'on appelle le calcul de Malliavin, cela se relie aux statistiques par l'intermédiaire de l'information de Fisher. Nous ne faisons ici qu'effleurer cette théorie en renvoyant à des références pour le lecteur qui souhaiterait approfondir.

Nous donnerons néanmoins une conséquence de cette théorie. Elle fournit une explication à *la délicate question de la permanence des erreurs* soulevée par Poincaré.

Après un aperçu des idées de Gauss sur la loi des erreurs, de celles de Poincaré sur la question de la permanence des erreurs, et l'exposé du calcul de Gauss et de sa cohérence, nous présentons l'outil d'extension qui permet de construire un calcul lipschitzien et son axiomatisation. Nous évoquerons ensuite les liens avec l'expérimentation et les statistiques puis les exemples d'épreuves répétées en dimension finie et infinie où l'on rencontre le phénomène de permanence des erreurs. Ce chapitre est inspirée des articles [14] et du livre [15].

Au contraire des grandeurs discrètes, les grandeurs continues sont le plus souvent entachées d'erreur. Devant ce problème pratique plusieurs attitudes se rencontrent. Nous nous proposons de parler d'erreurs rigoureusement, en les supposant petites et en contrôlant les termes de leurs développements dans les calculs. Cette voie a été initiée par Legendre, Laplace et Gauss au début du 19^{ème} siècle, dans une série de travaux qu'on désigne par *Théorie classique des erreurs*. Le plus célèbre d'entre eux

est la démonstration par Gauss de la “loi des erreurs” par laquelle il montre, avec des hypothèses dont certaines, implicites, seront relevées par d’autres auteurs, que si l’on considère, dans une situation expérimentale, que la moyenne arithmétique des mesures faites est la meilleure valeur à prendre en compte, on doit admettre que les erreurs suivent une loi normale. Son raisonnement est probabiliste : la grandeur à mesurer est une variable aléatoire X et les mesures X_1, \dots, X_n sont supposées conditionnellement indépendantes sachant X .

A la fin du même siècle, dans son cours de *Calcul des probabilités* Henri Poincaré revient sur cette question en montrant que si on affaiblit certains présupposés de Gauss, d’autres lois que la loi normale peuvent être atteintes. Il discute longuement un point nouveau et délicat : le phénomène de permanence des erreurs, qu’il énonce ainsi :

“Avec un mètre divisé en millimètres, on ne pourra jamais, écrit-il, si souvent qu’on répète les mesures, déterminer une longueur à un millionième de millimètre près”.

Ce phénomène est bien connu des physiciens, dans toute l’histoire de la physique on n’a jamais été capable de faire des mesures précises avec des instruments grossiers cf [1]. Cela signifie que faire beaucoup de mesures et prendre la moyenne ne suffit pas à garantir une précision arbitrairement fine. Nous approfondirons cette question et donnerons une explication mathématique de ce phénomène. Poincaré ne développe pas de formalisme mathématique pour cela, il insiste en revanche sur l’avantage de supposer les erreurs petites car alors l’argument de Gauss devient compatible avec les changements de variables non-linéaires qui peuvent s’écrire par le calcul différentiel.

1 Le calcul d'erreur de Gauss

Douze ans après sa démonstration conduisant à la loi normale, Gauss s’intéresse à la propagation des erreurs (*Theoria combinationis* 1821). Etant donnée une grandeur $U = F(V_1, V_2, \dots)$ fonction d’autres grandeurs V_1, V_2, \dots , il pose le problème de calculer l’erreur quadratique de U connaissant les erreurs quadratiques $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$ de V_1, V_2, \dots , ces erreurs étant supposées petites et indépendantes.

Sa réponse est la suivante

$$\sigma_U^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial V_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial V_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \dots \quad (7-1)$$

et il donne également la covariance de l’erreur de U et d’une autre fonction des V_1, V_2, \dots .

La formule (7-1) possède une propriété qui lui confère une grande supériorité vis à vis d’autres formules souvent proposées dans les manuels. C’est la *propriété de cohérence*. Avec une formule telle que

$$\sigma_U = \left|\frac{\partial U}{\partial V_1}\right| \sigma_1 + \left|\frac{\partial U}{\partial V_2}\right| \sigma_2 + \dots \quad (7-2)$$

les erreurs peuvent dépendre de la façon d’écrire la fonction F . En dimension 2 déjà si on applique (7-2) à une application linéaire injective puis à son inverse, on obtient que l’identité augmente les erreurs ce qui n’est pas acceptable.

Ceci ne se produit pas avec le calcul de Gauss. Pour le voir introduisons l’opérateur différentiel

$$L = \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{\partial^2}{\partial V_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{\partial^2}{\partial V_2^2} + \dots$$

et remarquons que (7-1) s’écrit

$$\sigma_U^2 = LF^2 - 2FLF$$

La cohérence vient alors de la cohérence du transport d’un opérateur différentiel par une fonction : si L est un tel opérateur, si u et v désignent des applications régulières injectives et si on note $\theta_u L$ l’opérateur

$$\varphi \mapsto L(\varphi \circ u) \circ u^{-1}$$

on a

$$\theta_{v \circ u} L = \theta_v(\theta_u L).$$

Les erreurs sur V_1, V_2, \dots peuvent ne plus être supposées indépendantes et peuvent dépendre des valeurs de V_1, V_2, \dots : on se donne un champ de matrices symétriques positives $(\sigma_{ij}(v_1, v_2, \dots))$ sur \mathbf{R}^d représentant les variances et covariances conditionnelles des erreurs sachant les valeurs v_1, v_2, \dots sur V_1, V_2, \dots et le calcul s’écrit :

$$\sigma_F^2 = \sum_{ij} \frac{\partial F}{\partial V_i}(v_1, v_2, \dots) \frac{\partial F}{\partial V_j}(v_1, v_2, \dots) \sigma_{ij}(v_1, v_2, \dots) \quad (7-3)$$

Le calcul d'erreur de Gauss traite des variances et covariances d'erreurs sans se préoccuper des erreurs moyennes c'est-à-dire des biais. Il est important de souligner que c'est la raison pour laquelle il ne fait intervenir que des dérivées premières. En effet si on part d'une situation où les erreurs sont centrées, après une application non linéaire les erreurs ne sont plus centrées et on peut vérifier que le biais de l'erreur est du même ordre de grandeur que la variance (cf [15]). Par d'autres applications régulières non linéaires cette situation va se perpétuer. Ceci permet de voir que *les variances peuvent se calculer par un calcul différentiel du premier ordre ne faisant intervenir que les variances, alors que les erreurs moyennes relèvent d'un calcul du second ordre qui fait intervenir les moyennes et les variances.*

La cohérence du calcul de Gauss permet de le géométriser. Si une grandeur varie sur une variété différentiable l'erreur associée peut être attachée au point de la variété comme objet géométrique. La variance de l'erreur est donnée par une forme quadratique qui est une métrique riemannienne sur la variété. On peut prendre des images par des applications injectives et de classe C^1 en un calcul cohérent indépendant des écritures des fonctions. Ceci se relie à la théorie des processus de diffusion sur les variétés pour laquelle nous renvoyons aux références [2].

2 Calcul d'erreur avec outil d'extension

Le calcul de Gauss est limité par le fait qu'il ne dispose d'aucun moyen d'extension. Par outil d'extension on entend, en mathématiques, un moyen de calculer sur des objets limites, c'est-à-dire définis par des limites. A partir de l'erreur sur (V_1, V_2, V_3) le calcul de Gauss permet de calculer l'erreur sur une fonction différentiable de (V_1, V_2, V_3) et c'est tout.

En particulier on aimerait pouvoir calculer l'erreur lorsque la fonction n'est pas explicite mais solution d'une équation différentielle ou intégrale ou d'un problème aux limites. En particulier, on aimerait étendre ce calcul aux fonctions lipschitziennes car il est clair *a priori* qu'une application lipschitzienne de constante ≤ 1 , est contractante donc diminue les erreurs.

Egalement dans une situation fréquente en calcul des probabilités où l'on a une suite de quantités $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ et où on connaît les erreurs sur les fonctions régulières d'un nombre fini de X_n , on aimerait pouvoir en déduire l'erreur sur des fonctions d'une infinité des X_n ou au moins sur certaines d'entre elles. Nous donnerons des exemples ci-dessous.

Il est en fait possible de doter le calcul d'erreur d'un outil d'extension naturel.

Pour cela on revient à l'idée initiale de Gauss de considérer que les grandeurs érronées sont aléatoires, disons définies sur un espace de probabilités (Ω, A, \mathbf{P}) . L'erreur quadratique sur une variable aléatoire X est elle-même aléatoire, nous la notons $\Gamma[X]$. Elle est supposée infinitésimale mais cela n'apparaît pas dans les notations, comme si nous avions une unité de mesure infinitésimale pour les erreurs fixée dans tout le problème. L'outil est le suivant : nous supposons que si $X_n \rightarrow X$ dans $L^2(\Omega, A, \mathbf{P})$ et si l'erreur $\Gamma[X_m - X_n]$ sur $X_m - X_n$ peut être rendue aussi petite qu'on veut dans $L^1(\mathbf{P})$ pour m, n grands, alors l'erreur $\Gamma[X_n - X]$ tend vers zéro dans $L^1(\mathbf{P})$.

C'est un principe de cohérence renforcé puisqu'il signifie que l'erreur quadratique sur X est attachée à X en tant qu'application mathématique et que si le couple $(X_n, \text{erreur quadratique sur } X_n)$ converge en un sens convenable il converge nécessairement vers $(X, \text{erreur quadratique sur } X)$.

Ceci s'axiomatise de la façon suivante.

On appelle *structure d'erreur* un espace de probabilité muni d'une forme de Dirichlet locale possédant un opérateur carré du champ. C'est un terme

$$(\Omega, A, \mathbf{P}, \mathbf{D}, \Gamma)$$

où (Ω, A, \mathbf{P}) est un espace de probabilité, vérifiant les quatre propriétés suivantes :

(1.) \mathbf{D} est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\Omega, A, \mathbf{P})$

(2.) Γ est une application bilinéaire symétrique de $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ dans $L^1(\mathbf{P})$ vérifiant le calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$, ce qui signifie que si $u \in \mathbf{D}^m$ et $v \in \mathbf{D}^n$, pour F et G de classe C^1 et lipschitziennes

de \mathbf{R}^m [resp. \mathbf{R}^n] dans \mathbf{R} , on a $F \circ u \in \mathbf{D}$ et $G \circ v \in \mathbf{D}$ et

$$\Gamma[F \circ u, G \circ v] = \sum_{ij} F_i'(u) G_j'(v) \Gamma[u_i, v_j] \quad \mathbf{P}\text{-p.s.}$$

(3.) La forme bilinéaire $E[f, g] = \mathbf{E}[\Gamma[f, g]]$ est fermée, ce qui signifie que \mathbf{D} est complet pour la norme $\|\cdot\| = (\|\cdot\|_{L^2(P)}^2 + E[\cdot, \cdot])^{1/2}$.

(4.) Enfin on suppose $1 \in \mathbf{D}$ et $\Gamma[1, 1] = 0$.

Commentaire. On note toujours $E[f]$ pour $E[f, f]$ et aussi $\Gamma[f]$ pour $\Gamma[f, f]$. Avec cette définition la forme E est une forme de Dirichlet notion introduite par Beurling et Deny [3] [13] comme outil de théorie du potentiel et qui reçut une interprétation probabiliste en termes de processus de Markov symétrique par les travaux de Silverstein et Fukushima cf [3] [5] [12]. L'opérateur Γ est l'opérateur carré du champ associé à E , étudié par de nombreux auteurs dans des contextes plus généraux que celui-ci cf [4] [5].

2.1 Premiers exemples

a) Un exemple simple de structure d'erreur est le terme

$$(\mathbf{R}, B(\mathbf{R}), \mu, H^1(\mu), \gamma)$$

où μ est la loi normale réduite $\mu = N(0, 1)$ et $H^1(\mu)$ est l'ensemble des $f \in L^2(\mu)$ telles que f' (au sens des distributions) soit dans $L^2(\mu)$ avec $\gamma[f] = f'^2$ pour $f \in H^1(\mu)$. Cette structure est associée au processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs réelles cf. [15].

b) Soit D un ouvert connexe de \mathbf{R}^d de volume unité, λ_d la mesure de Lebesgue, on prend $(\Omega, A, \mathbf{P}) = (D, B(D), \lambda_d)$. On définit

$$\Gamma[u, v] = \sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij} \quad \text{pour } u, v \in C_K^\infty(D)$$

où les a_{ij} sont des applications de D dans \mathbf{R} telles que

$$a_{ij} \in L_{loc}^2(D), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \in L_{loc}^2(D), \quad \sum_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^d, \forall x \in D.$$

On peut alors montrer que la forme $E[u, v] = \mathbf{E}[\Gamma[u, v]]$ avec $u, v \in C_K^\infty(D)$ est fermable (cf [5])

autrement dit, il existe une extension de Γ à un sous-espace \mathbf{D} de L^2 , $\mathbf{D} \supset C_K^\infty(\mathbf{D})$ telle que $(\Omega, A, \mathbf{P}, \mathbf{D}, \Gamma)$ soit une structure d'erreur.

2.2 Opération de prendre l'image : erreur sur le résultat d'une fonction des grandeurs mesurées

L'image d'une structure d'erreur par une application se fait très naturellement et fournit encore une structure d'erreur, dès que l'application satisfait certaines conditions assez larges cf [6]. En particulier si $(\Omega, A, \mathbf{P}, \mathbf{D}, \Gamma)$ est une structure d'erreur et si X est une variable aléatoire à valeurs \mathbf{R}^d dont les composantes sont dans \mathbf{D} , notons \mathbf{P}_X la loi de X et posons

$$D_X = \{f \in L^2(P_X) : f \circ X \in \mathbf{D}\}$$

$$\Gamma_X[f](x) = E[\Gamma[f \circ X] | X = x], \quad f \in D_X$$

alors le terme $(\mathbf{R}^d, B(\mathbf{R}^d), \mathbf{P}_X, D_X, \Gamma_X)$ est une structure d'erreur.

2.3 Opération de produit : erreur sur un couple ou une famille de grandeurs indépendantes

Le produit de deux ou d'une infinité dénombrable de structures d'erreur est toujours défini et donne une structure d'erreur. On obtient ainsi facilement des structures d'erreurs sur des espaces de dimension infinie, cf [6], par exemple sur l'espace de Wiener ou sur l'espace de Poisson et sur les modèles qui s'en déduisent, c'est une façon d'aborder le calcul de Malliavin, cf [7].

Indiquons à titre d'exemple la construction de la structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace du mouvement brownien autrement dit sur l'espace de Wiener.

Reprenons la structure d'erreur unidimensionnelle de l'exemple a)

$$(\mathbf{R}, B(\mathbf{R}), \mu, H^1(\mu), \gamma)$$

et considérons la structure produit infini qui s'en déduit :

$$(\Omega, A, \mathbf{P}, \mathbf{D}, \Gamma) = (\mathbf{R}, B(\mathbf{R}), \mu, H^1(\mu), \gamma)^{\mathbf{N}} = (\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, B(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), \mu^{\mathbf{N}}, \mathbf{D}, \Gamma).$$

Les applications coordonnées X_n , par construction du produit, sont gaussiennes réduites indépendantes, appartiennent à \mathbf{D} et vérifient

$$\Gamma[X_n] = 1$$

$$\Gamma[X_m, X_n] = 0 \quad m \neq n.$$

Soit ξ_n une base orthonormale de $L^2(\mathbf{R}_+, dt)$. On pose

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \xi_n(s) ds \cdot X_n$$

$(B_t)_{t \geq 0}$ est alors un mouvement brownien et si $f \in L^2(\mathbf{R}_+)$ s'écrit $f = \sum_n a_n \xi_n$, la variable aléatoire $\sum_n a_n X_n$ est notée $\int_0^{\infty} f(s) dB_s$ par extension du cas où f est étagée.

Nous avons alors $\int f(s) dB_s \in D$ et

$$\Gamma\left[\int f(s) dB_s\right] = \Gamma\left[\sum_n a_n X_n\right] = \sum_n a_n^2 \Gamma[X_n] = \sum_n a_n^2 = \|f\|_{L^2}^2$$

et par l'outil d'extension, le calcul d'erreur s'étend à d'autres fonctionnelles browniennes dont les solutions d'équations différentielles stochastiques à coefficients lipschitziens cf [6] [7] [11].

3 Calcul d'erreur et statistiques

Pour passer du calcul d'erreur de Gauss au calcul complet lipschitzien il est nécessaire de disposer d'une probabilité. Si des grandeurs sont variables mais déterministes comme parfois en mécanique, elles doivent être replacées dans un cadre probabiliste. C'est le terme (Ω, A, \mathbf{P}) d'une structure d'erreur $(\Omega, A, \mathbf{P}, \mathbf{D}, \Gamma)$.

Une première approche consiste à suivre les idées de E. Hopf dans les années 1930 qui dans l'esprit des travaux de Poincaré montra, par des formes générales de théorèmes limites en loi, que de nombreux systèmes dynamiques possèdent des lois de probabilité naturelles qu'on peut prendre comme loi *a priori*, cf [8] et [15].

Une seconde voie consiste à se donner un opérateur elliptique du second ordre L vérifiant

$$\Gamma[F] = LF^2 - 2FLF \quad (7-4)$$

(dont seuls les termes du second ordre sont déterminés par cette relation) qui fournit le cadre d'un calcul d'erreur pour les variances et les biais. Puis de construire la probabilité invariante vis à vis de laquelle la diffusion de générateur L est symétrique.

Nous suivons une troisième voie qui se relie plus directement aux applications. Nous considérons que les conditions expérimentales sont suffisamment spécifiées pour que la probabilité \mathbf{P} s'obtienne comme habituellement par les statistiques (cf chapitre 2) et nous allons montrer que les statistiques fournissent en fait également l'opérateur Γ donc finalement la structure d'erreur, au moins sur un domaine minimal pour Γ .

Considérons une grandeur erronée d -dimensionnelle X . L'espace image par X est

$$(\mathbf{R}^d, B(\mathbf{R}^d), \mathbf{P}_X(dx))$$

L'opérateur Γ que nous cherchons à définir se présente sous la forme

$$\Gamma_X[F](x) = \sum_{i,j=1}^d F_i'(x) F_j'(x) a_{ij}(x)$$

où la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))$ est symétrique positive, c'est elle qu'il faut connaître et qui représente la précision avec laquelle X est connu au point x .

Remarquons que si $G : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^m$ est de classe $C^1 \cap Lip$ d'après le calcul fonctionnel, la variable aléatoire $G(x)$ est alors connue avec la précision

$$\Gamma_X[G, G](x) = \nabla_x G \cdot A(x) \cdot (\nabla_x G)^t \quad (7-5)$$

où $\nabla_x G$ est la matrice jacobienne de G en x .

Mais pour connaître X , sous la loi conditionnelle $X = x$ notée \mathbf{E}_x , nous procédons à des mesures qui sont des

estimateurs du paramètre x . Soit T un tel estimateur à valeur \mathbf{R}^m de matrice de covariance

$$\mathbf{E}_x [(T - \mathbf{E}_x [T]).(T - \mathbf{E}_x [T])^t].$$

Sous les hypothèses statistiques dites du *modèle régulier* l'inégalité de Fréchet-Darmonis-Cramer-Rao s'écrit

$$\mathbf{E}[(T - \mathbf{E}_x[T]).(T - \mathbf{E}_x[T])^t] \geq \mathbb{E}_x \mathbf{E}_x T . J(x)^{-1} . (\mathbb{E}_x \mathbf{E}_x T)^t \quad (7-6)$$

au sens de l'ordre du cône des matrices symétriques positives, où $J(x)$ est la *matrice d'information de Fisher*, cf [9]. La meilleure précision qu'on peut avoir sur X est donc $J(x)^{-1}$ et la comparaison de (7-5) et (7-6) conduit à poser

$$\Gamma(x) = J(x)^{-1}.$$

On se convainc facilement que cette définition est compatible avec les changements de variables réguliers : si on estime $\psi(x)$ au lieu de x , on obtient comme structure d'erreur l'image par ψ de la structure d'erreur de X .

Cette connexion naturelle entre l'information de Fisher et l'approche des erreurs fondée sur les formes de Dirichlet ouvre une série de questions qui sont encore au stade de la recherche : a) Sous quelles hypothèses peut-on obtenir directement $J(x)^{-1}$ éventuellement singulière sans avoir à inverser la matrice d'information de Fisher ? b) Les méthodes de statistique asymptotique donnent-elles des outils pour étudier la fermabilité des pré-formes de Dirichlet sur \mathbf{R}^d ? Voir [10].

4 Que se passe-t-il lors de mesures répétées?

L'introduction d'opérateurs d'erreur en plus du langage probabiliste permet de traiter avec beaucoup de finesse la question des épreuves répétées et de répondre par des modélisations explicites au phénomène de permanence des erreurs pointé par Poincaré.

Comme nous allons le voir certains systèmes projectifs pour lesquels la limite projective des espaces de probabilité existe, n'admettent pas de structure d'erreur limite, mais définissent seulement une pré-structure d'erreur au sens suivant :

Un terme $(\Omega, A, \mathbf{P}, \mathbf{D}^0, \Gamma)$ est une pré-structure d'erreur si (Ω, A, \mathbf{P}) est une espace de probabilité et si \mathbf{D}^0, Γ vérifient les propriétés (1.), (2.) et (4.) des structures d'erreurs mais pas nécessairement la propriété (3.).

Il y a donc des pré-structures d'erreur fermables et des pré-structures d'erreur non-fermables. Images et produits se définissent facilement pour des pré-structures d'erreur. Fixons quelques notations pour les systèmes projectifs sous les hypothèses de régularité courantes cf [6] :

Etant donnés des espaces mesurables (E_i, F_i) i entier, pour α dans l'ensemble des parties finies de \mathbf{N}^* noté J un système projectif de structures d'erreur (ou de pré-structures d'erreur) est une famille $(E_\alpha, F_\alpha, m_\alpha, \mathbf{D}^0_\alpha, \Gamma_\alpha)$ de (pré-)structures d'erreur où $(E_\alpha, F_\alpha) = \prod_{i \in \alpha} (E_i, F_i)$ qui sont compatibles au sens

usuel. Posant alors $D^0 = \bigcup_{\alpha \in J} D^0_\alpha$ cela définit une pré-structure d'erreur

$$(E, F, m, \mathbf{D}^0, \Gamma)$$

dont les projections sont les $(E_\alpha, F_\alpha, m_\alpha, \mathbf{D}^0_\alpha, \Gamma_\alpha)$.

Les systèmes projectifs que nous considérons par la suite sont tels que les (E_i, F_i) sont identiques et que le système projectif soit auto-isomorphe par translation des indices, ceci afin de représenter des épreuves répétées.

Nous allons donner trois exemples. Dans les exemples 7.4.1 et 7.4.2 la situation dont on prend des épreuves répétées est finie dimensionnelle, c'est un modèle probabiliste de dimension finie avec des grandeurs erronées. Les propriétés asymptotiques des épreuves répétées sont différentes dans les cas 7.4.1 et 7.4.2. Dans l'exemple 7.4.3 le modèle probabiliste dont on fait des épreuves répétées est un espace de processus aléatoire, infini-dimensionnel, ce cas est important car il donne l'idée des applications les plus intéressantes (physique statistique, filtrage et prédiction, finance mathématique).

4.1 Epreuves indépendantes, erreurs corrélées, cas de convergence asymptotique

Dans le premier exemple que nous prenons, les erreurs sont corrélées, (ainsi que le suggérait Poincaré) et le système projectif est fermable :

$$(E_i, F_i) = ([0, 1], B([0, 1])) \quad \forall i \in \mathbf{N}^*$$

La pré-structure $(E_\alpha, F_\alpha, m_\alpha, D_\alpha^0, \Gamma_\alpha)$ est ainsi définie

$$(E_\alpha, F_\alpha, m_\alpha) = ([0, 1]^{|\alpha|}, B([0, 1]^{|\alpha|}), \lambda_{|\alpha|})$$

où

$|\alpha| = \text{card}(\alpha)$ et $\lambda_{|\alpha|}$ est la mesure de Lebesgue de dimension $|\alpha|$, on prend $D_\alpha^0 = C_K^0([0, 1]^{|\alpha|}) \otimes \mathbf{R}$, et pour $u, v \in D_\alpha^0$ on pose $\Gamma_\alpha[u, v] = \sum_{i, j \in \alpha} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij}$ où les a_{ij} sont constants et tels que les matrices

$(a_{ij})_{i, j \in \alpha}$ soient symétriques positives.

Dans ce cas on peut montrer que les pré-structures $(E_\alpha, F_\alpha, m_\alpha, D_\alpha^0, \Gamma_\alpha)$ sont fermables et également la pré-structure définie par leur système projectif. Sa fermeture définit une structure d'erreur

$$(E, F, m, \mathbf{D}, \Gamma)$$

dont les projections sont les fermetures des $(E_\alpha, F_\alpha, m_\alpha, D_\alpha^0, \Gamma_\alpha)$.

Les propriétés de cette structure $(E, F, m, \mathbf{D}, \Gamma)$ vont répondre à la question posée par Poincaré. On est donc dans le cas où les épreuves sont indépendantes mais les erreurs sont corrélées. Si $a_{ij}=1$, on peut montrer par la loi des grands nombres que l'erreur sur la moyenne s'évanouit.

C'est encore le cas si $a_{ij}=a(i-j)$ où a est une fonction telle que $\sum \xi_i \xi_j a(i-j) > 0$, grâce au théorème de représentation de Bochner cf [14].

Ce n'est plus le cas dans l'exemple suivant.

4.2 Epreuves indépendantes, erreurs corrélées mais pas de convergence asymptotique

Supposons que chaque mesure concerne une quantité scalaire, nous considérons la structure de probabilité produit représentant les épreuves répétées indépendantes X_i (applications coordonnées) et sur cet espace produit nous définissons sur les fonctions régulières l'opérateur carré du champ (opérateur représentant les variances et co-variances des erreurs) par

$$\Gamma_\alpha[u] = \left(\sum_{i \in \alpha} u'_i f(X_i) \right)^2 + \sum_{i \in \alpha} u_i^2 \cdot g(X_i)$$

Un choix convenable des fonction f et g permet de voir que la moyenne temporelle des épreuves tend bien vers leur espérance, mais que l'erreur sur la moyenne à savoir

$$\Gamma \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(X_n) \right]$$

tend vers $(\int h' \cdot f)^2$ qui n'est pas nul en général, cf [14] (2001) exemple B.

Le modèle décrit donc une situation analogue à celle relevée par Poincaré où faire la moyenne d'un grand nombre de mesures ne fait pas tendre l'erreur vers zéro.

4.3 Indications sur les cas de dimension infinie et le calcul de Malliavin

Comme exemple faisant intervenir la dimension infinie et permettant de voir le type de formalisme et de raisonnement, considérons le cas d'une ficelle de longueur L jetée sur le plan dont on mesure (par exemple au moyen de lignes parallèles très resserrées) la longueur totale de la projection sur l'axe Ox .

Par épreuves répétées ceci permet de mesurer la longueur de la ficelle comme nous allons le voir dans un instant.

Ceci peut être modélisé de la façon suivante : la ficelle est paramétrée par

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \cos(\varphi + B_s) ds$$

$$Y(t) = X_0 + \int_0^t \sin(\varphi + B_s) ds \quad 0 \leq t \leq L \leq 1$$

où B est un mouvement brownien standard et ϕ uniforme sur le cercle, indépendant de B . On mesure la quantité

$$A(\varphi, \omega) = \int_0^L |\cos(\varphi + B_s)| ds$$

On obtient l'espérance EA par épreuves répétées et on en déduit la longueur L de la ficelle par la formule

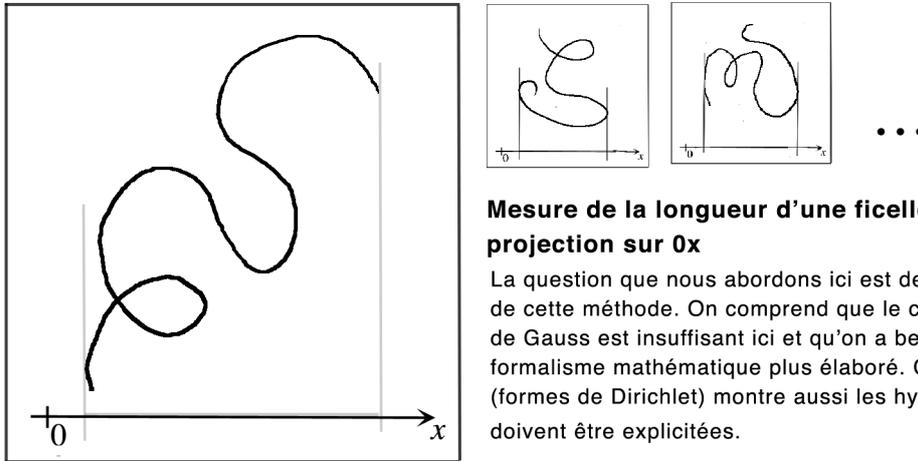
$$EA = \frac{2L}{\pi}$$

qui vient immédiatement de l'expression de A par intégration puisque ϕ et B sont indépendants.

Comme hypothèse sur les erreurs nous supposons qu'il y a une erreur sur ϕ et une erreur sur B indépendantes mais que les erreurs sur les diverses épreuves sont corrélées.

Sur ϕ on considère une erreur analogue au cas 7.4.2.

Sur B on considère pour la simplicité l'erreur donnée par la forme de Dirichlet associée au semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck cf [7] dont nous avons donné la construction plus haut.



Mesure de la longueur d'une ficelle par sa projection sur Ox

La question que nous abordons ici est de calculer l'erreur de cette méthode. On comprend que le calcul d'erreur de Gauss est insuffisant ici et qu'on a besoin d'un formalisme mathématique plus élaboré. Ce formalisme (formes de Dirichlet) montre aussi les hypothèses qui doivent être explicitées.

Des calculs explicites peuvent être menés si l'opérateur qui qualifie la corrélation des erreurs est spécifié. Par exemple si on prend la multiplication par une fonction $a(\varphi, \omega)$ pour l'espace de Wiener et par $b(\varphi, \omega)$ pour l'angle φ , avec $a(\varphi, \omega) = b(\varphi, \omega) \sqrt{g(\varphi)} = 1_{[0, 2\pi)}(\varphi)$, on obtient pour l'erreur asymptotique

$$\lim_{N \uparrow \infty} \Gamma \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A_n \right] = \int_{[0, L]} \left[\frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} |\cos x| - |\sin x| dx \right) \int_t^L \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}}}{\sqrt{2\pi s}} ds dx \right]^2 (dt + \delta_0(t))$$

expression qui montre que pour des phénomènes de dimension infinie, les résultats des calculs d'erreurs dépendent fortement du choix des hypothèses en ce qui concerne les lois de probabilités et les corrélations.

Ici la ficelle est de classe C^1 . D'autres modèles peuvent être définis et manipulés aisément lorsqu'on suppose que la ficelle est de classe C^2 , etc. voir [15].

5 Conclusion

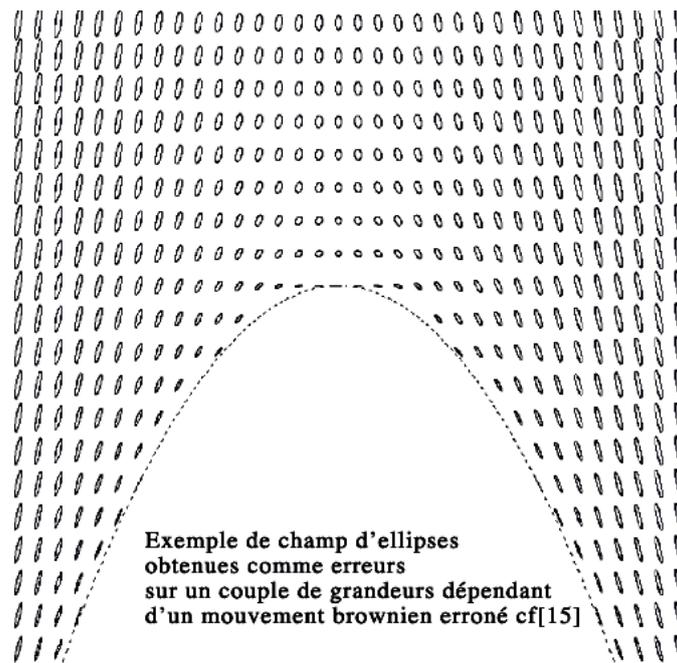
Dans ce chapitre nous avons voulu convaincre le lecteur de l'intérêt de pousser les idées de Gauss sur un calcul d'erreur relevant du calcul différentiel ce qui le rapproche d'un calcul de sensibilité.

Faisons deux remarques finales à ce sujet.

1) Il ne s'agit pas néanmoins d'un calcul de sensibilité au sens de la dérivation par rapport à un paramètre du modèle, opération strictement déterministe. Car le caractère aléatoire de l'erreur (même si celle-ci est infiniment petite) fait qu'après une application non linéaire, la moyenne de l'erreur n'est pas l'image de la moyenne de l'erreur initiale. Il s'agit donc d'un calcul de sensibilité probabiliste. Et ceci se traduit par un calcul différentiel du second ordre pour les biais.

2) Pourquoi utiliser des formes de Dirichlet ? Elles sont une notion mathématique, à mon avis, aussi importante que la notion d'espace de probabilité. Leur propriétés sont d'ailleurs souvent analogues à celles qu'on rencontre en calcul des probabilités.

Je pense avoir mathématiquement démontré que c'est l'objet naturel qui s'impose en matière de calcul d'erreur dès qu'on souhaite pouvoir raisonner sur des objets physiques moins élémentaires. Cf "When and how an error yields a Dirichlet form" *Journal of Functional Analysis* Vol 240, Issue 2 , (2006) 445-494.



5.1 Références

- [1] H. A. Klein, *The science of measurement, a historical survey*, Dover, 1974.
- [2] K. Itô, "Stochastic differential equations on a manifold" *Nagoya Math. J.* 1, 35-47, 1950. — N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes* North Holland, 1989.
- [3] A. Beurling, J. Deny, "Espaces de Dirichlet, I. le cas élémentaire" *Acta Math.* 99 (1958), 203-224 ; "Dirichlet spaces", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 45 (1959), 206-215 — M. Fukushima, *Dirichlet forms and Markov processes*, North-Holland- Kodansha, 1980.
- [4] N. Bouleau, F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter, 1991.
- [5] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet forms and Markov processes*, de Gruyter, 1994 — Z. Ma, M. Röckner, *Dirichlet forms*, Springer, 1992.
- [6] N. Bouleau, F. Hirsch, *op. cit.* Chap.V — N. Bouleau, "Construction of Dirichlet structures", *Potential Theory ICPT 1994*, de Gruyter, 1995.
- [7] D. Nualart, *The Malliavin calculus and related topics*, Springer 1995 — P. Malliavin, *Stochastic Analysis*, Springer, 1997.

- [8] E. Hopf, "On causality, statistics and probability" *J. Math. and Physics* MIT, 13, 51-102, 1934 — E. Engel, "A road to randomness in physical systems" *Lect. notes in Stat.* 71, Springer 1992.
- [9] D. Dacunha-Castelle, M. Duflo, *Probabilité et statistiques I. Problèmes à temps fixe*, Masson, 1982.
- [10] N. Bouleau et C. Chorro, "Error Structures and Parameter estimation" *C. R. Acad. Sci. Paris*, sér I 338 (2004) 305-310.
- [11] S. Watanabe, *Lectures on Stochastic differential equations and Malliavin calculus* Tata Institute, Springer 1984.
- [12] N. Bouleau, "Décomposition de l'énergie par niveau de potentiel", *L. N. in Math. Vol 1096*, Springer 1984.
- [13] A. Beurling, J. Deny, *op. cit.* — J. Deny, "Théorie de la capacité dans les espaces fonctionnels" *Séminaire Brelot-Choquet-Deny*, 9ème année, 1, 1964-65.
- [14] N. Bouleau "Calcul d'erreur complet lipschitzien et formes de Dirichlet" *Journal de Math. Pures et App.* vol 80, n9, 961-976 (2001) — "On some errors related to the graduation of measuring instruments" 2006 hal-00105452 — "On error operators related to the arbitrary functions principle" *Jour. Functional Analysis* 251, (2007) 325-345.
- [15] N. Bouleau, *Error Calculus for Finance and Physics, the Language of Dirichlet Forms*, De Gruyter 2003.