Exercices pour profanes et amateurs

Table des matières

1 A. Exercices de calcul et de raisonnement

Exercice A1. loi de composition

Sur $\mathbb{R}$ on considère la loi de composition interne

$$x * y = \log(e^x + e^y).$$

Montrer que $*$ est associative et que l'addition dans $\mathbb{R}$ est distributive par rapport à cette loi :

$$(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$$

Exercice A2. Cercle orthoptique de Monge

On considère l'hyperbole d'équation $y^2 - mx^2 = 1$ avec $m > 1$.

a) Montrer qu'une droite $y = ax + b$ est tangente à l'hyperbole ssi

$$a^2 + mb^2 = m.$$

b) Montrer que le lieu des points d'où l'on voit l'hyperbole sous un angle droit est le cercle d'équation $m(x^2 + y^2) = m - 1$.

c) Que se passe-t-il quand m tend vers $+\infty$?

d) Mêmes questions en remplaçant l'hyperbole par une ellipse.

e) Par une parabole.

Exercice A3. Un exemple de George Polya

On considère un triangle quelconque dont les dimensions sont connues. Trouver le plus grand carré inscrit dans le triangle.

Exercice A4. Encorbellement

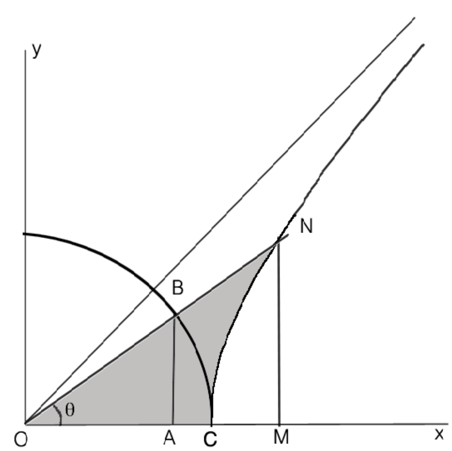
On empile des briques les unes sur les autres dans un plan vertical en les décalant vers la droite. Quelle la plus grande distance horizontale qu'on peut atteindre sans effondrement ?

Exercice A5. Interprétation géométrique de la trigonométrie hyperbolique

Dans un célèbre mémoire (1761) de M. Lambert où il démontre l'irrationalité de π, celui-ci utilise la figure suivante comme support de pensée pour interpréter les fonctions trigonométriques hyperboliques. Le point N étant sur l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$, si on pose $MN = \sinh t$ et $OM = \cosh t$ on a bien

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Donc t est lié à θ par la relation $\tanh t = \tan \theta$. Une question naturelle qui se pose alors est de savoir que représente t sur la figure.



a) Montrer que t n'est pas la longueur de l'arc CN de l'hyperbole.

b) Calculer l'aire du secteur OCN.

c) Soit $a \in]0, +\infty[$. On définit la transformation τ par

$$\begin{array}{ll} \tau(x) & = \frac{1}{2}[(a+1/a)x + (a-1/a)y] \\ \tau(y) & = \frac{1}{2}[(a-1/a)x + (a+1/a)y] \end{array}.$$

Montrer que si (x, y) est sur l'hyperbole il en est de même de $(\tau(x), \tau(y))$.

d) Montrer que si $x = \cosh t$ et $y = \sinh t$ alors $\tau(x) = \cosh(t + \log a)$ et $y = \sinh(t + \log a)$. En déduire que τ transforme un secteur issu de O appuyé sur l'hyperbole en un secteur de même aire.

Exercice A6. Séries d'après Cauchy (Cours d'analyse 1821)

Soit une série (1) $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ où les u_n sont positifs et décroissants. Et soit la série (2) $u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \ldots + 2^n u_{2^n-1} + \ldots$. On veut montrer que les séries (1) et (2) convergent ou divergent en même temps.

a) Si (1) est convergente, soit s sa somme. Montrer que

$$2^n u_{2^n-1} \leq 2(u_{2^{n-1}} + u_{2^{n-1}+1} + u_{2^{n-1}+2} + \ldots + u_{2^n-1}).$$

En tirer que la somme de (2) est inférieure à $u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + \ldots = 2s - u_0$.

b) Si (1) est divergente. Montrer que $2^n u_{2^n-1} \geq u_{2^n-1} + u_{2^n} + \ldots + u_{2(2^n-1)}$. En déduire que la somme de la série (2) est $+\infty$.

c) Application : prenant pour (1) la série harmonique $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ montrer qu'elle diverge.

d) Par la même méthode montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n \log n}$ diverge.

e) On pose $\log^+(x) = \log x$ si $x \geq e$ et $\log^+(x) = 1$ si $x \leq e$. Et on pose $\log^{+(k)}(x) = \log^+(\log^+(\ldots \log^+(x)) \cdots)$ où $\log^+$ est itérée k fois. Par récurrence montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n \log^+ n \log^{+(2)} n \cdots \log^{+(k)} n}$ pour k fixé est divergente.

Exercice A7. Une formule de François Viète (1540-1603).

On considère la suite u_n définie par $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u_n}$.

a) On suppose $u_1 \in]0, 1[$. Montrer que $u_{n+1} > u_n$ et que $1 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(1 - u_n)$.

b) En déduire que $v_n = \log(u_n)$ est négatif, croît vers zéro, et que la série $\sum_n v_n$ est convergente. Conclure que le produit $\Pi_{k=1}^n u_k = u_1 u_2 \cdots u_n$ est décroissant et converge vers une quantité > 0.

c) Montrer que le périmètre du polygône régulier de 2^n côtés inscrit dans le cercle unité est égal à $2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n}$ (quantité qui tend vers 2π par argument géométrique ou parce que $\sin x$ est équivalent à x au voisinage de 0). Utilisant la relation $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ montrer que ceci s'écrit

$$2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{4}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cdots \cos \frac{\pi}{2^n}} = \frac{4}{u_1 \cdots u_{n-1}}$$

avec $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire la formule de Viète

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

d) En utilisant plus généralement l'équivalent $2^n \sin\frac{\theta}{2^n} \sim \theta$ démontrer pour $\theta \in [0,\pi/2]$

$$\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cdots}$$

d'où pour $y \in [0,1]$

$$\arcsin y = \frac{y}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2}}}\cdots}$$

Exercice A8. Irrationalité de e.

Si e était égal à $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers, on aurait

$$0 = (\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!})q!.$$

Montrer que c'est impossible en montrant que $\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!}$ est compris strictement entre 0 et 1.

Exercice A9. Intégration.

Montrer que pour n entier naturel, la fonction $x \mapsto |\log x|^n$ est intégrable sur $]0,1]$. Calculer cette intégrale.

Exercice A10. Règle de Weierstrass (1815-1897)) (ou théorème de Lebesgue dans le cas discret).

Soit $(a_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $|a_k(n)| \le b(n)\ \forall n$ où $b(n)$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\sum_n b(n) < +\infty$.

Alors si $\forall n\ a_k(n)$ tend vers $a_\infty(n)$ quand $k \to \infty$, la série $\sum_n a_\infty(n)$ est absolument convergente et $\sum_n a_k(n)$ tend vers $\sum_n a_\infty(n)$.

Exercice A11. Produits infinis

On étudie le produit $\Pi_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ où les a_n sont des réels tels que $|a_n| < 1$ et tendant vers zéro.

D'après le développement de $\log(1+x)$ on peut écrire

$$\log(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2}a_n^2(1+\varepsilon(a_n))$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers zéro quand x tend vers 0.

1) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} \log(1+a_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{N} a_n^2)(1+\zeta_N)$$

où ζ_N est compris entre $\inf_{n=1}^N \varepsilon(a_n)$ et $\sup_{n=1}^N \varepsilon(a_n)$.

2) En déduire que le produit infini converge vers une quantité finie non nulle dès que les séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n a_n^2$ sont convergentes. (Et dans ce cas ζ_N converge quand N tend vers l'infini).

3) Montrer que pour $s > \frac{1}{2}$ le produit infini $\Pi_{n\geq 1}(1+(-1)^n\frac{1}{n^s})$ converge vers une quantité finie non nulle.

4) Montrer que pour $s = 1/2$ le logarithme du produit tend vers $-\infty$ et donc le produit tend vers zéro.

Exercice A12. Lemme de Fatou discret.

Soit $a_k(n)$ une suite de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que cette suite est croissante pour chaque n fixé : $0 \leq a_k(n) \leq a_{k+1}(n)$ et converge vers $a_\infty(n) \in \mathbb{R}_+$ pour chaque n.

Montrer que $\lim_{k\uparrow\infty} \sum_{n=0}^\infty a_k(n) = \sum_{n=0}^\infty a_\infty(n)$ que ces quantités soient finies ou infinies. Pour cela Montrer que $\lim_{k\uparrow\infty} \sum_{n=0}^\infty a_k(n) \leq \sum_{n=0}^\infty a_\infty(n)$. Puis montrer l'égalité dans les cas fini puis infini.

Exercice A13. Application du précédent.

On étudie la suite $u_k = (1-\frac{1}{k})^k + (1-\frac{2}{k})^k + \cdots + (1-\frac{k-1}{k})^k$.

a) Montrer que $(1-\frac{n}{k})^k$ croît quand k croît.

b) En déduire la limite de u_k lorsque $k \uparrow \infty$.

Exercice A14. Moyenne arithmético-géométrique d'ordre 3.

On reprend l'idée de l'exercice A1 et pour a_0, b_0, c_0 strictement positifs on pose

$$\begin{cases} a_{n+1} = & \log(\frac{e^{a_n}+e^{b_n}+e^{c_n}}{3}) \\ b_{n+1} = & \frac{a_n+b_n+c_n}{3} \\ c_{n+1} = & \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \end{cases}$$

a) Montrer en utilisant la convexité de la fonction exponentielle que $c_n \leq b_n \leq a_n$ dès que $n \geq 1$.

b) En déduire que la suite c_n est croissante et a_n décroissante.

c) Soient c et a les limites de ces suites. Montrer que a et c sont reliés par la relation

$$a = \log(\frac{e^a + e^{c^2/a} + e^c}{3})$$

d) En déduire que $a = c$ et que donc les nombres a_n, b_n, c_n convergent vers une limite que l'on notera $T(a_0, b_0, c_0)$. Montrer que T est une fonction symétrique de ses arguments.

2 B. Exercices de géométrie à faire mentalement

Cette pédagogie tire parti de raisonnements d'Archimède (287-212 av.J.-C.) et de Cavalieri (1598–1647).

Exercice B1.

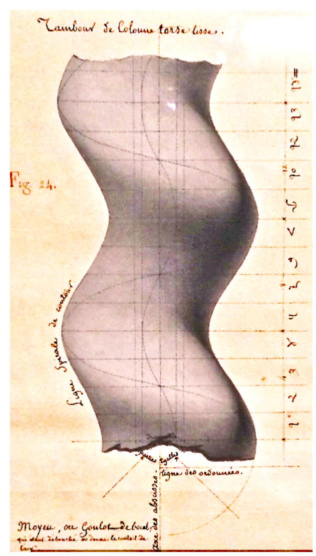
L'aire d'un triangle ne change pas lorsqu'on déplace un de ses sommets parallèlement au côté opposé puisqu'elle vaut le demi produit de la base par la hauteur. Mais peut-on le comprendre autrement ?

[Coupons le triangle en fines tranches parallèles au côté fixe, lorsque le sommet se déplace, les tranches glissent les unes sur les autres. Nous voyons que l'aire est conservée. Car il est facile de se convaincre que les problèmes avec les petits escaliers sur les bords sont d'autant moins graves que les tranches sont plus fines et qu'à la limite le raisonnement est parfaitement rigoureux.]

Exercice B2.

Pourquoi l'aire d'un cercle est-elle égale à la moitié de la circonférence multipliée par le rayon ?

[Parce que si on découpe le cercle comme une tarte en fines parts, on peut le déployer en laissant les croutes des parts voisines se toucher et s'aligner suivant un segment de droite égal à la circonférence. Les parts forment alors des dents de scie, si on ramène par la pensée toutes les pointes sur l'une d'entre elles parallèlement au segment de droite, par ce qu'on vient de voir à propos des triangles, l'aire est inchangée, on n'a plus qu'un seul triangle dont l'aire est l'aire cherchée. Et l'erreur commise s'évanouit si les parts sont de plus en plus fines.]



Exercice B3.

Pourquoi une colonne torse, comme on en voit dans les églises baroques, a même volume que la colonne droite de même base et de même hauteur ?

[C'est comme les empilements de tablettes de chocolat dans les devantures des confiseries. Si les sections horizontales de la colonne torse sont des cercles identiques à la base, le raisonnement des tranches s'applique, de même à partir d'une pile de pièces de monnaies on peut en les décalant obtenir une pile hélicoïdale de même volume et de même hauteur.]

Exercice B4.

a) Pourquoi le volume d'un cône ne change pas si on déplace son sommet dans un plan parallèle à la base ?

b) Ce volume ne dépend pas de la forme de la base mais uniquement de son aire.

c) Dès lors on peut le calculer sur un cas particulier.

[le premier point s'obtient par la méthode des tranches. Pour le b) on découpe la base en petites parties et on considère les petits cônes correspondants. Dès lors, que ce volume soit le tiers de l'aire de la base multipliée par la hauteur résulte de n'importe quel cas particulier, par exemple de ce qu'un cube se partage à partir de son centre en six pyramides égales.]

Exercice B5.

a) Le volume de la sphère est égal au tiers de sa surface par son rayon.

[En effet on partage la sphère en petits cônes issus du centre et on raisonne en ouvrant la sphère comme une papaye, puis en ramenant toutes les pointes en une seule.]

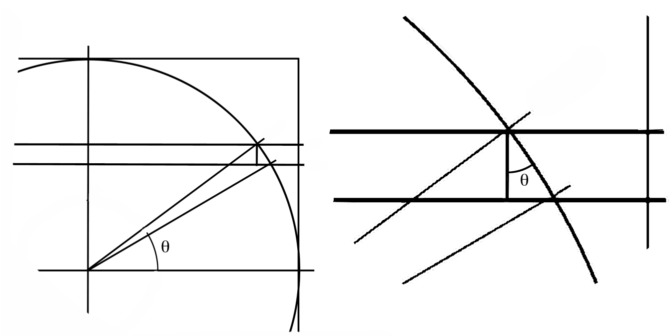
b) De même un polyèdre régulier circonscrit à une sphère (dont les faces sont tangentes à la sphère) est composé de cônes issus du centre de la sphère dont la hauteur est le rayon de la sphère et son volume est donc égal au tiers de sa surface par le rayon de la sphère

c) Il est intéressant de noter que cette propriété est encore vraie si le polyèdre est irrégulier pourvu que toutes ses faces soient tangentes à la sphère même si le nombre des faces est infini comme pour le cylindre circonscrit à la sphère par exemple.

Exercice B6. Des résultats d'Archimède

Nous sommes tout près des résultats du traité de la sphère et du cylindre d'Archimède, si nous acceptons un petit calcul qui serait un peu difficile à faire de tête.

Considérons le cylindre circonscrit à une sphère et coupons le par des tranches parallèles aux bases. Il se trouve que dans chaque tranche la portion de surface de la sphère découpée est égale à l'aire de la portion de cylindre découpée.



a) Montrer cela par le calcul si la tranche est infiniment mince.

[l'aire de la portion de surface de la sphère vaut $R\,d\theta.R\cos\theta$ et celle de la portion de cylindre vaut $R\,d\theta\cos\theta.R$]

b) Donc c'est vrai, par sommation, si la tranche est quelconque . D'où il résulte que l'aire de la sphère est égale à l'aire latérale du cylindre qui est les deux tiers de l'aire totale du cylindre, bases comprises.

c) D'où il suit, par ce qu'on a dit sur le volume de la sphère et celui des polyèdres circonscrits, que le volume de la sphère est les deux tiers du volume du cylindre.

Exercice B7. Volume de l'onglet aussi appelé sabot d'Archimède.

Considérons une sphère et partageons-la par des plans méridiens comme une orange ou comme des fuseaux horaires entre des méridiens si vous préférez. Sur chaque fuseau l'équateur vient dessiner un arc. Déployons notre orange sur une table de sorte que les bouts d'équateur viennent toucher la table en s'alignant. Puis déformons par la pensée ces quartiers en déplaçant les segments qui constituent leurs nervures en les translatant parallèlement au plan de la table pour les ramener sur l'un d'entre eux. La surface latérale est conservée ainsi que le volume total. Nous obtenons une portion de cylindre circulaire droit coupé par deux demi-plans passant par une perpendiculaire à son axe, ce qui délimite un onglet.

En déduire que le volume de l'onglet est $\frac{2}{3}R^2.h$ où R est le rayon du cercle de base du cylindre et h la hauteur de l'onglet c'est-à-dire le plus grand segment de génératrice du cylindre situé entre les deux demi-plans.

[Si on part d'une sphère le volume de l'onglet qu'on obtient est $\frac{4}{3}\pi R^3$. Cet onglet a pour hauteur un grand cercle de la sphère soit $2\pi R$. Le raisonnement montre que le volume de l'onglet est proportionnel à h. Il en résulte que ce volume est $\frac{2}{3}R^2 h$.]

Commentaire.

Cette portion de cylindre coupée par deux demi-plans passant par une perpendiculaire à son axe est ce qu'on appelle souvent le "sabot" d'Archimède. celui-ci était assez fier d'en avoir trouvé le volume et prend ce calcul comme exemple pour faire apprécier sa méthode à Eratosthène, c'était le premier "*kybismos*", mesure exacte d'un volume limité en partie par une surface courbe. L'approche suivie ici est plus simple que la sienne qui utilise deux équilibres successifs dont l'un résulte de relations métriques fort ingénieuses. Il confirme d'ailleurs son résultat par une autre méthode fondée sur l'aire de la section de parabole qu'il avait obtenu précédemment. Il est intéressant de noter que les commentaires d'Archimède faits par Eutocius sept siècles après Archimède reprennent ses raisonnements en alourdissant tout ce qui était conceptuel et vivant. Ils obscurcissent plutôt. La même remarque est faite par Jean Dieudonné à propos des commentaires des travaux d'Evariste Galois par ses contemporains. Ils sont compliqués et alambiqués là où le texte de Galois nous paraît simple et clair. Archimède dit lui-même comment il voulait être lu : "Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas venues à l'esprit."

Nous n'avons entrevu ici qu'une partie de la pensée heuristique d'Archimède qui consiste à déformer des éléments infinitésimaux en conservant les aires dans le plan ou les volumes dans l'espace, mais Archimède complète cet outil par un autre qui est de les déformer en conservant l'équilibre par rapport à un axe des parties supposées pesantes. C'est très fécond aussi bien sûr.

Exercice B8. Volume et surface latérale du tore.

On considère un tore c'est-à-dire le corps engendré par la rotation d'un cercle autour d'une droite de son plan ne le coupant pas. Si on découpe le tore en fines tranches par des plans passant par l'axe de révolution, une procédure identique à celle utilisée pour le sabot d'Archimède le transforme en un cylindre droit à base circulaire terminé par un plan oblique ayant même volume et même surface latérale que le tore.

a) En déduire que le volume du tore est égal à la surface du cercle générateur multipliée par la demi-somme des circonférences la plus externe et la plus interne engendrées par la rotation de ce cercle générateur.

[On a obtenu un cylindre circulaire droit coupé par un plan oblique. L'idée en d'en mettre deux bout à bout les bases biseautées l'une contre l'autre. Cela donne le résultat.]

b) Et que la surface latérale du tore est égale à la circonférence de son cercle générateur multipliée par la demi-somme des circonférences la plus externe et la plus interne engendrées par la rotation de ce cercle générateur.

Exercice B9. Onglets plus généraux.

Soit une courbe fermée du plan horizontal (régulière sans point double) servant de base à un cylindre droit vertical indéfini vers le haut et vers le bas.

a) Si l'on coupe ce cylindre par un plan passant par le centre de gravité de la base, les deux portions de cylindre découpées au dessus et au dessous du plan horizontal ont même volume.

[Observons que par rapport à une droite de son plan passant par le centre de gravité, la surface-base supposée pesante est en équilibre. Cet équilibre est une égalité de moments pour les éléments de surface, et la valeur numérique du moment d'un élément de surface est, à un coefficient près, le volume de la portion au dessus de cet élément – ou au dessous selon le cas – limitée par le plan oblique.]

b) Si l'on coupe le même cylindre maintenant par un plan passant par le centre de gravité de la courbe frontière de cette base, les deux portions de cylindre découpées au dessus et au dessous du plan horizontal ont même aire latérale.

[même raisonnement.]

Exercice B10. Les deux théorèmes de Guldin (1577-1643).

On considère une courbe plane fermée régulière et le corps de révolution obtenu par sa rotation autour d'une droite de son plan ne la rencontrant pas.

a) Premier théorème : son volume est égale à l'aire de la section multipliée par la circonférence décrite par le centre de gravité de la section.

b) Second théorème : son aire latérale est égale à la longueur de la courbe frontière de la section multipliée par la circonférence décrite par le centre de gravité de cette courbe.

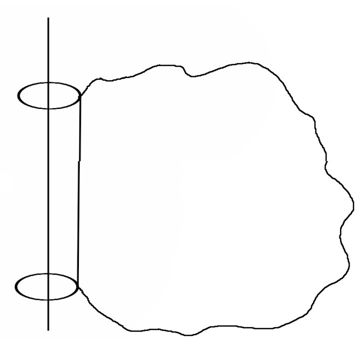
[Toujours par la même méthode des tranches par des plans passant par l'axe, déploiement, et puis regroupement, le corps est transformé en un cylindre droit ayant pour base la section, limité à l'autre extrémité par un plan oblique et de même volume et même aire latérale que le corps initial. Si la base est horizontale et le cylindre vertical, chaque fibre verticale du cylindre a pour longueur la circonférence qui était décrite par le point où elle rencontre la base. Par application du lemme précédent on ne change pas le volume du cylindre en le coupant horizontalement à la hauteur de la circonférence décrite par le centre de gravité de la section. On a le premier théorème : le volume est le produit de l'aire de la section par la circonférence décrite par le centre de gravité. Et le même raisonnement donne aussi bien le second théorème l'aire latérale est le produit de la longueur de la courbe frontière de la section par la circonférence décrite par le centre de gravité de cette courbe.]

Commentaire

Pappus d'Alexandrie au 4ème siècle de notre ère connaissait au moins le premier théorème, sans doute les deux. Selon certains historiens P. Guldin le savait et, sans l'excuse d'une redécouverte inconsciente, se les est attribués (Cf. H. W. Turnbull in *The World of Mathematics* ed. J. R. Newman, Simon and Schuster 1956, p.111). Il s'agit de ce qu'on appelle *la Seconde Ecole d'Alexandrie* aux 3ème et 4ème siècles après J.-C. avec les mathématiciens Heron, Pappus et Diophante, dont les dates ne sont pas exactement connues. Pappus est l'auteur d'un traité en huit volumes auquel Descartes se réfère pour montrer la force de la méthode de géométrie analytique.

Avant le calcul intégral, pour le calcul des aires ou des volumes on employait depuis Euclide (Livre XII, 2) le terme d'exhaustion afin de désigner l'opération de remplissage parfait par des éléments de plus en plus fins et nombreux. Euclide l'emploie pour approcher la circonférence par des polygones inscrits. Archimède la perfectionne considérablement (aire de la section de parabole, etc.).

Exercice B11.



a) Supposons que la courbe de l'exercice B10 toujours régulière et ne rencontrant pas l'axe de rotation ne soit pas fermée. Montrer que le raisonnement s'applique encore et que le second théorème de Pappus-Guldin est encore valide.

b) Supposons que la courbe de l'exercice B10 rencontre l'axe de rotation. Plus précisément qu'un segment de l'axe de rotation soit une partie de la courbe fermée dont le reste est entièrement situé d'un même côté de l'axe.

Montrer en raisonnant par approximation comme indiqué par la figure que les deux façons d'appliquer le second théorème de Pappus-Guldin en considérant la courbe fermée (par le segment situé sur l'axe) ou non fermée (sans le segment situé sur l'axe) donnent le même résultat.

c) Et de même pour le premier théorème concernant le volume.

Exercice B12.

a) Déduire du premier théorème de Pappus-Guldin et du résultat d'Archimède que le centre de gravité d'un demi-disque unité est situé à la distance $\frac{4}{3\pi}$ du centre du disque.

b) Et du second théorème que le centre de gravité d'une demi circonférence de rayon unité est situé à la distance $2/\pi$ du centre.

c) Les résultats du a) et du b) vous apparaissent-ils compatibles ?

[Oui, si on découpe le demi-disque par des cercles concentriques on voit que le centre de gravité du demi-disque est plus près du centre que celui de la demi circonférence.]

3 C. Exercices avec des nombres complexes

Exercice C1. Théorème de Lebesgue discret
Soit α_n une suite de nombres ≥ 0. Soit $(a_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $|a_k(n)| \leq b(n)$ $\forall n$ où $b(n)$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\sum_n \alpha_n b(n) < +\infty$.

Alors si $\forall n$ $a_k(n)$ tend vers $a_\infty(n)$ quand $k \to \infty$, la série $\sum_n \alpha_n a_\infty(n)$ est absolument convergente et $\sum_n \alpha_n a_k(n)$ tend vers $\sum_n \alpha_n a_\infty(n)$.

Exercice C2. Application du théorème de Lebesgue discret
Pour $z \in \mathbb{C}$ on part de la relation

$$(1+\frac{z}{k})^k = 1 + z + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}(\frac{z}{k})^n + \cdots + (\frac{z}{k})^k$$

On pose $a_k(1) = 1+z$ et pour $n > 1$

$$a_k(n) = \begin{cases} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}(\frac{z}{k})^n & si\ n \leq k \\ 0 & si\ n > k \end{cases}$$

1) De $a_k(n) = \frac{z^n}{n!}(1-\frac{1}{k})\cdots(1-\frac{n-1}{k})$ si $k \geq n$ montrer que

$$\text{pour tout } n \qquad \lim_{k\to\infty} a_k(n) = \frac{z^n}{n!}.$$

2) De $|a_k(n)| \leq \frac{|z|^n}{n!}$ montrer que le théorème de Lebesgue s'applique et donc que $\lim_{k\to\infty}(1+\frac{z}{k})^k$ existe $\forall z \in \mathbb{C}$ et vaut e^z.

Exercice C3.
On part de la relation $\lim_{k\to\infty}(1+\frac{z}{k})^k = e^z$.
1) Montrer que pour x réel

$$\sin x = \lim_k \frac{1}{2i}[(1+\frac{ix}{k})^k - (1-\frac{ix}{k})^k]$$

2) Montrer que les zéros du polynôme entre crochets $Q(x) = (1+\frac{ix}{k})^k - (1-\frac{ix}{k})^k$ sont donnés par

$$(\frac{k+ix}{k-ix})^k = 1$$

et donc que $\frac{k+ix}{k-ix}$ est une racine k-ième de l'unité. Ce qui donne $x = k\tan\frac{m\pi}{k}$.

3) Comme k tend vers l'infini on peut considérer la sous-suite où k est pair. Posant $k = 2p$ montrer que les racines cherchées sont alors

$$0, \quad \pm 2p \tan \frac{m\pi}{2p} \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \dots, p-1.$$

4) Le terme de plus bas degré de $Q(x)$ étant x on a

$$Q(x) = x\left(1 - \frac{x}{2p\tan\frac{\pi}{2p}}\right)\left(1 + \frac{x}{2p\tan\frac{\pi}{2p}}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{2p\tan\frac{(p-1)\pi}{2p}}\right)\left(1 + \frac{x}{2p\tan\frac{(p-1)\pi}{2p}}\right)$$

d'où le développement en produit dû à Euler :

$$\sin x = x \lim_{p\to\infty} \Pi_{m=1}^{p-1}\left[1 - \frac{x^2}{4p^2\tan^2\frac{m\pi}{2p}}\right].$$

Exercice C4. Règle d'Abel

1) Montrer cette extension de la règle classique d'Abel : Si les nombres ε_n sont positifs décroissants et tendent vers zéro, et si les fonctions complexes $a_n(\lambda)$ de $\Lambda \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont continues et telles que la somme $\sum_{k=0}^{n} a_k(\lambda)$ reste bornée, uniformément en λ, alors la série $\sum_n a_n\varepsilon_n$ est convergente et sa somme est continue en λ.

2) Montrer que les ε_n étant comme dans le 1) pour $a_n = u^n$ avec u dans le disque unité fermé moins le point 1, la série $\sum_n a_n(u)\varepsilon_n$ converge vers une fonction continue de u.

Exercice C5. Application du précédent

On rappelle que la détermination principale du logarithme du nombre complexe $u = |u|e^{i\arg(u)}$ est définie comme la fonction continue dans le demi-plan $\mathrm{Re}(u) > 0$ donnée par $\log u = \log|u| + i\arg(u)$ où $\arg(u)$ est choisi compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

On rappelle que l'on a alors pour $|z| < 1$

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} - \cdots - (-1)^n\frac{z^n}{n} - \cdots$$

1) Montrer que la série du membre de droite converge aussi pour $z = e^{i\theta}$ si $\theta \neq \pi$ vers une fonction continue pour z dans le disque unité fermé moins le point -1, et que donc la relation ci-dessus y est encore valide.

2) Prenant $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, +\pi[$ montrer que $1 + z = (2\cos\frac{\theta}{2}).e^{i\theta/2}$, et donc que $\log(1+z) = \log(2\cos\frac{\theta}{2}) + i\frac{\theta}{2}$.

D'où par le 1)

$$\frac{\theta}{2} = \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \cdots \qquad (*)$$

par exemple en prenant $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1} + \cdots = \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{(4m+1)(4m+3)} + \cdots$$

3) Soit $\alpha \in]0,\pi[$, appliquons $(*)$ avec $\theta = \alpha - \pi \in]-\pi, 0[$ on obtient $\arg(1+z) = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}$ d'où

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} = -\sin\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{\sin 3\alpha}{3} - \cdots \qquad (**)$$

et en retranchant $(**)$ de $(*)$ appliquée avec $\theta = \alpha$ on obtient

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\sin\alpha + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \cdots + \frac{\sin(2p+1)\alpha}{2p+1} + \cdots\right)$$

et avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots\right).$$

(formule connue de Newton).

Exercice C6. Calculs avec les nombres complexes.

On va démontrer la relation suivante

$$\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}.\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

grâce à un produit de racines d'un polynôme complexe.

a) Pour cela considérer le polynôme $(1+z)^n = e^{2nia}$ et montrer que ses racines sont données par

$$\begin{array}{rcl} z_0 + 1 = & \cos 2a + i\sin 2a & = 1 - 2\sin^2 a + 2i\sin a\cos a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n-1} + 1 = & \cos(2a + \frac{2(n-1)\pi}{n}) + i\sin(2a + \frac{2(n-1)\pi}{n}) & = 1 - 2\sin^2(2a + \frac{2(n-1)\pi}{n}) + 2i\ldots \end{array}$$

b) En déduire que le produit des racines est égal à

$$z_0 z_1 \cdots z_{n-1} = 2^n.A.e^{i(a+\frac{\pi}{2})+\cdots+i(a+\frac{\pi}{2}+\frac{n-1}{n}\pi)}$$

où $A = \sin a.\sin(a+\frac{\pi}{n})\cdots\sin(a+\frac{(n-1)\pi}{n})$.

c) Exprimer le produit des racines par les coefficients du polynôme pour montrer que

$$(-1)^n(1 - e^{2nia}) = 2^n.A.e^{na+n\pi-\frac{\pi}{2}}$$

et en déduire l'expression

$$A = \frac{(-1)^n}{2^n}.\frac{1-e^{2nia}}{e^{ina}.e^{i(n\pi-\frac{\pi}{2})}} = \frac{\sin na}{2^{n-1}}$$

d) Conclure en calculant la limite quand a tend vers zéro de

$$\frac{\sin na}{2^{n-1}\sin a}.$$

4 D. Exercices de logique élémentaire

Exercice D1. Logique

Un marcheur va de A à B distants de 6 km en une heure (à vitesse variable). Montrer que

a) il existe un kilomètre contigu qu'il parcourt en un temps $t \leq 10$ mn,

b) il existe un intervalle de temps de 10 mn consécutives où il parcourt une distance $d \geq 1$ km.

Exercice D2. Logique et probabilités

On considère deux jeux de cartes identiques. On tire une carte du premier jeu et une du second qu'on pose cachées sur la table.

1) On bat les deux cartes et on en regarde une, elle est rouge quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

2) On recommence mais cette fois on ne bat pas les cartes et celle qu'on retourne est celle du premier paquet, elle est rouge. Quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

3) On jette deux dés dont l'un tombe sur la table et l'autre par terre. Celui qui est sur la table indique 6. Quelle est la probabilité que l'autre indique un nombre impair ?

Exercice D3. Proportions.

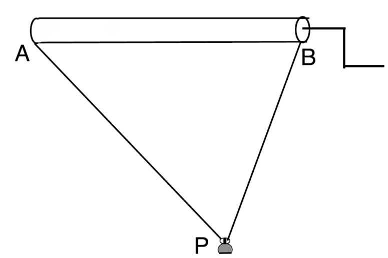
Une étude conclut que tel médicament améliore la santé d'une fraction de 35% du groupe ethnique A et d'une fraction de 45% du groupe ethnique B. Une seconde étude conclut que ce médicament améliore la sante de 60% du groupe A et de 65% du groupe B.

1) Peut-on affirmer que le médicament améliore un plus grand pourcentage du groupe ethnique B que du groupe ethnique A ?

2) La première étude a concerné un échantillon de 100 personnes du groupe A et 1000 personnes du groupe B. La seconde étude a concerné 1000 personnes du groupe A et 100 personnes du groupe B. Quels sont les pourcentages d'amélioration des 1100 personnes du groupe A et des 1100 personnes du groupe B ?

Exercice D4. Poids.

Un poids P est suspendu à un cylindre horizontal par deux ficelles comme indiqué sur la figure.

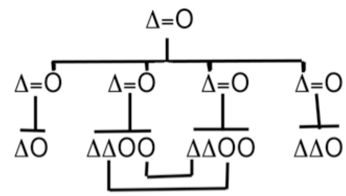


1) On tourne le cylindre, à quel endroit du segment AB se trouvera le poids P lorsqu'il touchera le cylindre ?

2) Même question en remplaçant le cylindre par un cône.

Exercice D5. Mariages (d'après Cl. Lévi-Strauss)

Une société suit les règles de mariage suivantes (appelées règles de l'échange restreint par Lévi-Strauss) :



mariage entre cousins croisés

Les mariages se font entre cousins croisés c'est-à-dire soit fils de frère avec fille de sœur (mariage dit patrilinéaire), soit fils de sœur avec fille de frère (mariage dit matrilinéaire).[O : femme ; Δ : homme ; $\Delta = \mathrm{O}$: mari et femme ; $\overline{\Delta\ \mathrm{O}}$: frère et sœur.]

Montrer que si le nom d'un clan se transmet du père aux enfants et qu'une telle société est partagée en deux clans A et B, si les mariages se font entre le clan A et le clan B, les règles de mariage vont perpétuer cette situation.

5 Indications

Exercice A2. Cercle orthoptique

b) Ecrivant la seconde tangente $y = ux + v$ on éliminera b et v en fonction de a dans le système d'équations

$$y = ax + b, \quad y = -x/a + v, \quad a^2 + mb^2 = m, \quad 1/a^2 + mv^2 = m.$$

Exercice A3. Un exemple de George Polya

a) Le plus grand carré inscrit dans le triangle ABC a toujours une de ses arêtes portée par un côté du triangle. [C'est la partie la plus difficile du problème, on peut la sauter en prenant comme hypothèse que le carré est cherché parmi ceux dont une arête est portée par un côté du triangle, c'est ce que fait Polya d'ailleurs (*Comment poser et résoudre un problème* Dunod 1965)]. En effet si un carré ne touche les côtés AB, BC, CA qu'aux points E, F, G, respectivement et si I est l'intersection de la perpendiculaire à AB en E avec la perpendiculaire à BC en F, on peut faire tourner la carré autour de I soit dans un sens soit dans l'autre soit dans les deux sens. Dans tous les cas le triangle n'est pas optimal.

b) Supposons donc que le carré ait une arête sur AB et soit contenu dans le triangle. Un tel carré peut être agrandi par homothétie de centre A et par homothétie de centre B de sorte qu'il touche AC et BC disons en M et N respectivement. La droite AN est déterminée par le fait que si on augmente encore le carré par l'homothétie de centre A vient un moment où la hauteur du triangle issue de C est un côté du carré.

Les similitudes de centre A et de centre C donnent alors en notant h la hauteur issue de C et a le côté du carré $a/h = AM/AC$ et $a/AB = MC/AC$ d'où $a(1/h + 1/AB) = 1$ d'où a.

c) Il n'est que de répéter cette opération avec un carré appuyé sur BC puis sur AC pour comparer et prendre le plus grand.

Exercice A4. Encorbellement

Soit $2a$ la longueur des briques, notons g_n l'abscisse du centre de gravité de la n-ième brique. Supposant que la n-ième brique est juste en équilibre sur la $(n-1)$-ième on a $g_n = g_{n-1} + a$. Supposant que les briques n et $n-1$ soient juste en équilibre sur la $(n-2)$-ième nous avons $(g_n + g_{n-1})/2 = g_{n-3} + a$. Et ainsi de suite jusqu'à $(g_n + \ldots + g_1)/n = g_0 + a$. De sorte que pour un total de $n+1$ briques on a

$$\begin{aligned}
g_n &= g_{n-1} + a \\
g_n + g_{n-1} &= 2g_{n-2} + 2a \\
g_n + g_{n-1} + g_{n-2} &= 3g_{n-3} + 3a \\
&\vdots \\
g_n + g_{n-1} + \ldots + g_2 &= (n-1)g_1 + (n-1)a \\
g_n + g_{n-1} + \ldots + g_1 &= ng_0 + na
\end{aligned}$$

d'où en gardant la première ligne et retranchant la 1ère ligne de la 2ème, la 2ème de la 3ème, etc.

$$\begin{aligned} g_n &= \ g_{n-1} + a \\ 2g_{n-1} &= \ 2g_{n-2} + a \\ &\vdots \\ (n-1)g_2 &= \ (n-1)g_1 + a \\ ng_1 &= \ ng_0 + a. \end{aligned}$$

D'où $g_n = g_0 + a(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n)$. L'encorbellement maximal est asymptotiquement équivalent à $a \log(n)$.

Exercice A5. Interprétation géométrique de la trigonométrie hyperbolique

a) On montrera que lorsque t est grand la longueur $s(t)$ de l'arc CN est équivalente à $\sqrt{2}\cosh t$.

b) Notant α l'angle courant qui balaye l'intervalle $[0, \theta]$ cette aire vaut

$$S = \int_0^\theta \int_0^{\rho(\alpha)} r\, dr d\alpha$$

où $\rho(\alpha)$ tiré de la relation $\rho^2 \cos^2\alpha = 1 + \rho^2 \sin^2\alpha$ vaut $\rho^2(\alpha) = 1/(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$ d'où

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\theta \frac{d\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{1}{2}\int_0^\theta \frac{1 + \tan^2\alpha}{1 - \tan^2\alpha}\, d\alpha.$$

Faisant le changement de variable $s = \tan\alpha$ et utilisant alors la relation $\tan\theta = \tanh t$, on obtient

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\tanh(t)} \frac{ds}{1 - s^2} = \frac{1}{2}\mathrm{artanh}(\tanh t) = \frac{1}{2}t.$$

Notons que θ en radians est aussi le double de l'aire du secteur du cercle unité qu'il délimite. L'analogie est donc complète.

Exercice A6

d) On montrera que $\frac{2^n}{(2^n-1)\log(2^n-1)} \geq \frac{1}{n \log 2}$.

Exercice A8. Irrationalité de e.

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{q+1}^\infty \frac{q!}{n!} \quad &= \tfrac{1}{q+1} + \tfrac{1}{(q+1)(q+2)} + \tfrac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots \\ &< \tfrac{1}{q+1} + \tfrac{1}{(q+1)^2} + \tfrac{1}{(q+1)^3} + \cdots \\ &= \tfrac{1}{q} < 1 \end{aligned}$$

Exercice A9. Intégration.

La fonction $|\log x|^n$ n'a pas de primitive explicite connue. Mais l'aire sous son graphe est égale à l'aire sous le graphe de la fonction réciproque qui est symétrique par rapport à la première diagonale. (Cette assertion peut ici être démontrée facilement car la fonction $x \mapsto |\log x|^n$ est continue décroissante de $+\infty$ à 0 lorsque x croît de 0 à 1 : les tranches verticales et les tranches horizontales donnent le même résultat.).

Cette fonction réciproque est $y \mapsto e^{-y^{1/n}}$. Il suffit donc de montrer que

$$\int_0^\infty e^{-y^{1/n}} dy = \int_0^\infty e^{-t} n t^{n-1} dt \ < +\infty.$$

Or cette dernière intégrale se calcule par récurrence en intégrant par partie et vaut $n!$.

Exercice A10. Règle de Weierstrass (1815-1897)) (ou théorème de Lebesgue dans le cas discret).

On a $\sum_{n=0}^N |a_k(n)| \to \sum_{n=0}^N |a_\infty(n)|$ et le reste $\sum_{n=N+1}^\infty |a_k(n)|$ est majoré en module par $\sum_{N+1}^\infty b(n)$ qui peut être rendu aussi petit qu'on veut. Le résultat en découle comme on montre qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue :

a) $\sum_n |a_k(n)|$ est une suite de Cauchy

b) sa limite est $\sum_n |a_\infty(n)|$

c) $\sum_n a_k(n) \to \sum_n a_\infty(n)$.

Exercice A11. Produits infinis

1) En effet on a

$$\zeta_N = \frac{\sum_{n=1}^N a_n^2 \varepsilon(a_n)}{\sum_{n=1}^N a_n^2}.$$

Exercice A12. Lemme de Fatou discret.

On a pour tout k

$$\sum_{n=0}^\infty a_k(n) \leq \sum_{n=0}^\infty a_\infty(n)$$

il en résulte en faisant $k \uparrow \infty$ qu'on a l'inégalité $\lim_{k\uparrow\infty} \sum_{n=0}^\infty a_k(n) \leq \sum_{n=0}^\infty a_\infty(n)$.

a) Si la somme $\sum_{n=0}^\infty a_\infty(n)$ est finie, on a

$$\sum_{n=0}^\infty a_\infty(n) - \lim_{k\uparrow\infty} \sum_{n=0}^N a_k(n) = \sum_{n=N+1}^\infty a_\infty(n)$$

et comme $\lim_{k\uparrow\infty} \sum_{n=0}^\infty a_k(n) \geq \lim_{k\uparrow\infty} \sum_{n=0}^N a_k(n)$ il en résulte que

$$\sum_{n=0}^\infty a_\infty(n) - \lim_{k\uparrow\infty} \sum_{n=0}^\infty a_k(n) \leq \sum_{n=N+1}^\infty a_\infty(n)$$

d'où le résultat en faisant tendre N vers l'infini.

b) Si la somme $\sum_{n=0}^\infty a_\infty(n)$ est infinie, pour tout nombre $A \in \mathbb{R}_+$ il existe N_1 tel que $N \geq N_1$ entraîne $\sum_{n=0}^N a_\infty(n) \geq A$. Donc il existe K_1 tel que $k \geq K_1$ entraîne $\sum_{n=0}^N a_k(n) \geq A/2$, donc aussi $\sum_{n=0}^\infty a_k(n) \geq A/2$, donc $\lim_k \sum_{n=0}^\infty a_k(n) \geq A/2$ d'où le résultat.

Exercice A13. Application du précédent.

a) On étudiera la fonction $f(x) = (1 - \frac{n}{x})^x = \exp(x \log(1 - \frac{n}{x}))$ en calculant sa dérivée.

b) Le lemme de Fatou s'applique

$$\lim u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_k (1 - \frac{n}{k})^k = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1}$$

Exercice A14. Moyenne arithmético-géométrique d'ordre trois

c) Si n est grand on a :

$$\begin{cases} a(1+\varepsilon_1) = & \log((e^{a(1+\varepsilon_2)} + e^{b_n} + e^{c(1+\varepsilon_3)})/3) \\ c(1+\varepsilon_4) = & \sqrt[3]{a(1+\varepsilon_2)b_n c(1+\varepsilon_3)} \end{cases}$$

d'où en éliminant b_n et en faisant tendre les ε vers zéro :

$$a = \log(\frac{e^a + e^{c^2/a} + e^c}{3}).$$

Et en posant $c = \theta a$ avec $\theta \in]0, 1]$ et $e^a = z > 1$ on obtient

$$2z = z^{\theta^2} + z^{\theta}$$

ce qui n'est possible que si $\theta = 1$. Donc $a = c$.

Exercice C1. Théorème de Lebesgue discret

Même méthode qu'à l'exercice A10.

Exercice C4. Règle d'Abel

1) Posons $S_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\lambda)$. On a pour $p < q$

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k(\lambda)\varepsilon_k = \sum_{k=p+1}^{q} (S_k - S_{k-1})\varepsilon_k = \sum_{p+1}^{q} S_k\varepsilon_k - \sum_{k=p+1}^{q} S_{k-1}\varepsilon_k = \sum_{p+1}^{q} S_k\varepsilon_k - \sum_{k=p}^{q-1} S_k\varepsilon_{k+1}$$

$$= S_q\varepsilon_q + \sum_{k=p+1}^{q-1} S_k(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) - S_p\varepsilon_{p+1}$$

d'où en notant M un majorant de $S_n(\lambda)$, les ε_k étant décroissants

$$|\sum_{k=p+1}^{q} a_k(\lambda)\varepsilon_k| \leq M \left(\varepsilon_q + \sum_{p+1}^{q-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_{p+1} \right) = 2M\varepsilon_{p+1}$$

il en résulte que $S_n(\lambda)$ est uniformément convergente.

2) La série géométrique $\sum_{k=0}^{n} \rho^n e^{in\varphi}$ reste bornée uniformément si $u = \rho e^{i\varphi}$ est dans le disque unité fermé et reste éloigné du point 1.

Exercice C5. Application du précédent

1) Poser $u = -z$, $a_n(u) = -u^n$ et $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.

Exercice D1. Logique

Pour le a) partager la distance AB en 6 portions d'un kilomètre et raisonner par l'absurde. De même pour le b) en partageant le temps

Exercice D2. Logique et probabilités

1) Réponse 2/3. Les cas pour les cartes tirées sont RR, NR, RN, NN, équiprobables. Seuls RR, RN, NR sont possibles.

2) Réponse 1/2. Ce qui est relatif au second paquet est indépendant de ce qui est relatif au premier

3) Réponse 6/11. Sur le tableau des 36 cas équiprobables, seuls les 11 cas où l'un des deux dés affiche 6 sont possibles. Il y a six possibilités pour l'autre d'afficher un nombre impair.

Exercice D3. Proportions.

1) Non

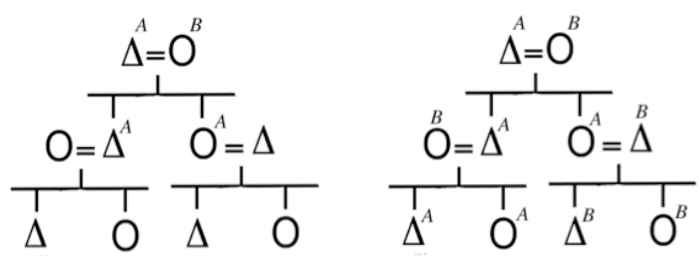
2) Le calcul est immédiat (35+600)/1100 pour le groupe A, et (450+65)/1100 pour le groupe B. Le pourcentage est plus grand pour le groupe A

Exercice D4. Poids.

1) Imaginons que les ficelles soient des traits tracés sur un tissu. Lorsque le cylindre tourne le tissu s'enroule sans plis autour du cylindre. Le poids reste donc sur une verticale au cours du mouvement.

2) Par le même raisonnement avec un cône le poids décrit un cercle de centre le sommet du cône.

Exercice D5. Mariages.



Supposons donc que l'appartenance des enfants soit celle du clan du père. Si durant deux générations la règle de mariage entre clan A et clan B est respectée, le mariage entre cousins croisés la maintient automatiquement : le simple fait d'être du clan A et de se marier entre cousins croisés patrilatéraux ou matrilatéraux fait que l'on se marie avec une personne du clan B. Si nous avions pris l'autre hypothèse, le clan des enfants étant celui de la mère, ce serait pareil par symétrie.